CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC
TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Mai Ngọc Thắng – A1 (08-11) THPT NTMK, Tp.HCM

Chứng minh đẳng thức và tính giá trị biểu thức trong giải tích tổ hợp là một vấn đề khá rộng, nó có mặt trong những bài thi ĐH và cả trong các đề thi HSGQG. Với mong muốn giúp các bạn có thêm tư liệu cho việc tự học, đây là những kiến thức tôi có được trong quá trình luyện thi với người thầy kính yêu Vũ Vĩnh Thái và thêm một ít tôi sưu tầm được, tôi xin tổng hợp lại thành một chuyên đề nho nhỏ cũng nhằm thêm mục đích là lưu trữ. Mọi góp ý xin liên hệ qua email maingocthang1993@gmail.com hoặc nick yahoo blackjack2512.

I. Vài công thức cần nhớ:

_ Chỉnh hợp: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

_ Tổ hợp: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

_ Tính chất của tổ hợp: $C_n^k = C_n^{n-k}$

Hằng đẳng thức Pascal: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

_ Nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Trong chuyên đề này hầu hết là liên quan đến tổ hợp nên các bạn cần nắm vững và sử dụng thuần thục 3 công thức liên quan đến tổ hợp như trên và trong từng mục tôi sẽ nhắc lại công thức áp dụng trong các bài tập thuộc mục đó.

II. Các phương pháp và ví dụ minh họa:

Các bài tập tôi nêu ra đều minh họa khá rõ cho phương pháp và sẽ có một số bài tập để các bạn có thể rèn luyện lại. Tôi sẽ cố gắng phân tích hướng giải ở một số bài toán với mong muốn giúp các bạn hiểu sâu sắc hơn về lời giải của bài toán đó.

Cách 1: Biến đổi đồng nhất, thay các công thức tổ hợp, đôi khi dùng sai phân, thường xuất phát từ vế phức tạp rồi dùng một số phép biến đổi để đưa biểu thức về giống vế đơn giản.

VD1: Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $\dfrac{C_{n+1}^k}{C_n^k} = \dfrac{n+1}{n-k+1} \quad (n,k \in N, n \geq k)$ 2. $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \quad (n,k \in N, 2 \leq k \leq n)$

3. $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{1}{C_n^k} \quad (n,k \in N^*, n \geq k)$ (ĐH B 2008)

4. $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ là một số chính phương $(n,k \in N, n+k \geq 2)$

Giải: 1. Dễ dàng nhận thấy ta sẽ xuất phát từ vế trái và ta biến đổi

$$\frac{C_{n+1}^k}{C_n^k} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}.\frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n+1}{n-k+1}$$

3. Tương tự câu 1, ta cũng sẽ xuất phát từ vế trái là vế phức tạp

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{k!(n-k+1)!}{(n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}\right)$$

$$= \frac{n+1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!(n-k+1+k+1)}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!(n+2)}{(n+1)!} = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}$$

2,4. Xem như bài tập tự luyện.

VD2: (ĐHAN 2001- CĐ 2003)

1. Chứng minh với mọi $\forall n \geq 2$ và n nguyên thì ta có: $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + ... + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}$

2. Rút gọn biểu thức: $F = C_n^1 + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + ... + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}}$

Giải: Bài này minh họa cho ý tưởng sai phân, đó là biến đổi số hạng tổng quát theo hiệu 2 biểu thức rồi thế giá trị và đơn giản từ từ.

1. Với $n = 1,2,3,.....,n$ ta có:

$$\frac{1}{A_n^2} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Vậy $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + ... + \frac{1}{A_n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$

2. Cũng với ý tưởng sai phân nhưng ta biến đổi có hơi khác so với câu 1

$C_n^1 = n$, $\quad \frac{2C_n^2}{C_n^1} = 2\frac{n!}{2!(n-2)!}.\frac{(n-1)!}{n!} = n-1$, $\quad \frac{3C_n^3}{C_n^2} = 3\frac{n!}{3!(n-3)!}.\frac{2!(n-2)!}{n!} = n-2$

…………………………… $\quad \frac{kC_n^k}{C_n^{k-1}} = n-k+1$

…………………………… $\quad \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = 1$

Cộng n đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$F = C_n^1 + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + ... + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = n + (n-1) + (n-2) + ... + (n-k+1) + ... + 2 + 1$$

$= 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (theo công thức tính tổng cấp số cộng)

VD3: Chứng minh:
1. (ĐHKTCN 1998) $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k \ (n,k \in N, 3 \le k \le n)$
2. (ĐHQGHCM 1997) $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k \ \ (n,k \in N, 4 \le k \le n)$

Giải: Bài này minh họa cho HĐT Pascal: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Công thức này đối với những bạn chưa làm quen thì hơi khó nhớ, có câu "thần chú" sau của thầy mình giúp các bạn dễ nhớ hơn dù nghe nó rất là bình thường: "cùng trệt lầu so le, nâng trệt lấy lầu cao". Với ý tưởng đó ta sẽ nhóm các số hạng nhằm sử dụng HĐT Pascal:

1. $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + 2\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + \left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right)$

$= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = \left(C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}\right) + \left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right) = C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k$

2. Hoàn toàn tương tự câu 1.

VD4: 1. (TTĐTBDCBYTHCM 1998)
Cho 2 số nguyên n, m thỏa $0 < m < n$. Chứng minh: $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + ... + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$
2. Cho $n,k \in N^*, n \ge k$. Rút gọn: $S = C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + ... + C_{n-1}^k + C_n^k$

Giải: Ở VD trên là dùng HĐT Pascal theo chiều thuận là gom 2 thành 1, còn ở VD này ta sẽ dùng theo chiều ngược tức là tách 1 thành 2.

1. Ta có: $\begin{cases} C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} \\ C_{n-1}^m = C_{n-2}^m + C_{n-2}^{m-1} \\ .... \\ C_{m+1}^m = C_m^m + C_m^{m-1} \\ C_m^m = C_{m-1}^{m-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + ... + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$

2. Hoàn toàn tương tự

Cách 2: Khai triển lũy thừa nhị thức rồi thay biến bằng giá trị thích hợp.

VD1: Chứng minh:
1. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$
2. $9^0 C_n^0 + 9^1 C_n^1 + 9^2 C_n^2 + ... + 9^n C_n^n = 10^n$

Giải: 1. Ta thấy vế trái của đẳng thức chứa C_n^0 và C_n^n đồng thời mỗi hệ số của tổ hợp là 1 nên ta sẽ chọn khai triển $(1+x)^n$ và thấy các số hạng đổi dấu nên sẽ chọn $x = -1$.

Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$ (1)

Trong (1) thay $x = -1$ ta được $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$

2. Trong (1) thay $x=9$ ta được $9^0C_n^0+9^1C_n^1+9^2C_n^2+.....+9^nC_n^n=10^n$

VD2: 1. (ĐHQGHCM 1997 – ĐHYDHCM 2000)

Chứng minh $C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+.....+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+.....+C_{2n}^{2n}$

2. (ĐHSPV 2000) Chứng minh $C_{2n}^2+C_{2n}^4+.....+C_{2n}^{2n-2}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+.....+C_{2n}^{2n-1}-2$

Giải: 2 bài trên bản chất giống nhau nên tôi sẽ giải mẫu bài 2.

2. Nhận thấy vế trái của đẳng thức khuyết mất $C_{2n}^0+C_{2n}^{2n}$ nên ta sẽ cộng thêm lượng này vô để sử dụng khai triển $(1+x)^{2n}$ và thật may mắn $C_{2n}^0+C_{2n}^{2n}=2$ nên ta có lời giải như sau:

YCBT $\Leftrightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+.....+C_{2n}^{2n-2}+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+.....+C_{2n}^{2n-1}$

Ta có: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^3x^3+C_{2n}^4x^4+.....+C_{2n}^{2n-2}x^{2n-2}+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Thay $x=-1$ ta được $0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+C_{2n}^4-.....+C_{2n}^{2n-2}-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

Từ đây chuyển vế đổi dấu ta có đpcm.

VD3: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn:

1. (ĐH D 2003) $C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+.....+2^nC_n^n=243$ (1)

2. (ĐH D 2008) $C_{2n}^1+C_{2n}^3+.....+C_{2n}^{2n-1}=2048$ (2)

Giải: Thoạt nhìn tưởng 2 bài trên là giải phương trình nhưng thực chất lại là yêu cầu tính tổng bởi nếu không rút gọn được vế trái ta sẽ không thể tìm được n.

1. Nhận thấy lũy thừa của 2 tăng dần nên ta sẽ chọn $x=2$ trong khai triển $(1+x)^n$

Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+.....+C_n^nx^n$

Thay $x=2$ ta được: $3^n=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+.....+2^nC_n^n$

Vậy (1) $\Leftrightarrow 3^n=243=3^5\Leftrightarrow n=5$

2. C1: Vế trái của phương trình ta thấy khuyết đi lượng $C_{2n}^0+C_{2n}^2+.....+C_{2n}^{2n}$ trong khai triển $(1+x)^{2n}$ nhưng nếu tinh ý ta sẽ thấy $C_{2n}^0+C_{2n}^2+.....+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+.....+C_{2n}^{2n-1}$ (đã được chứng minh ở câu 1 VD6) và ta đi đến lời giải như sau:

Ta có: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^3x^3+.....+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Thay $x=-1$ và chuyển vế đổi dấu ta có: $C_{2n}^0+C_{2n}^2+.....+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+.....+C_{2n}^{2n-1}$

(2) $\Leftrightarrow\left(C_{2n}^1+C_{2n}^3+.....+C_{2n}^{2n-1}\right)+\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2+.....+C_{2n}^{2n}\right)=2.2048$

$\Leftrightarrow(1+1)^{2n}=2.2048\Leftrightarrow 2^{2n-1}=2048=2^{11}\Leftrightarrow n=11$

C2: Bài này còn 1 cách là sử dụng chiều đảo của HĐT Pascal khá đẹp mắt.

Áp dụng HĐT Pascal $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$ ta có:

$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = \left(C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1\right) + \left(C_{2n-1}^2 + C_{2n-1}^3\right) + ... + \left(C_{2n-1}^{2n-2} + C_{2n-1}^{2n-1}\right)$

Dễ thấy đây chính là khai triển của $(1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$ nên $(2) \Leftrightarrow 2^{2n-1} = 2048 = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11$

Cách 3: Viết 1 lũy thừa nhị thức dưới dạng tích của 2 lũy thừa nhị thức, khai triển từng vế rồi đồng nhất các số hạng tương ứng. Cách này thường được sử dụng khi vế phức tạp của đẳng thức. là tích của 2 tổ hợp $C_n^k.C_m^n$ hoặc bình phương của 1 tổ hợp $\left(C_n^k\right)^2$

VD1: Cho n nguyên dương. Chứng minh $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

Giải : * Ta có: $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n, \forall x$ (1)

Mà $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$

Trong khai triển hệ số của x^n là C_{2n}^n (2)

* Mặt khác : $(1+x)^n(1+x)^n = \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n\right)$

$= \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n\right)\left(C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + ... + C_n^0\right)$

Hệ số của x^n là trong tích trên là : $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có : $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

VD2: Chứng minh với m, k, n nguyên dương, $m \le k \le n$ ta có:

$C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + C_m^2C_n^{k-2} + ... + C_m^mC_n^{k-m} = C_{m+n}^k$ (HĐT Vandermonde)

Giải : * Ta có: $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n, \forall x$ (1)

Mà $(1+x)^{m+n} = \sum_{j=0}^{m+n} C_{m+n}^j x^j$

Trong khai triển hệ số của x^k là C_{m+n}^k (2)

* Mặt khác : $(1+x)^m(1+x)^n$

$= \left(C_m^0 + C_m^1x + C_m^2x^2 + ... + C_m^mx^m\right)\left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^{k-2}x^{k-2} + C_n^{k-1}x^{k-1} + C_n^kx^k + C_n^nx^n\right)$

Hệ số của x^k trong tích trên là $C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + C_m^2C_n^{k-2} + ... + C_m^mC_n^{k-m}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có : $C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + C_m^2C_n^{k-2} + ... + C_m^mC_n^{k-m} = C_{m+n}^k$

VD3: 1. Cho n nguyên dương. Chứng minh: $(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_n^2)^2 - ..... + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^nC_{2n}^n$

2. Cho n nguyên dương lẻ. Chúng minh: $1 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - (C_n^3)^2 + ... - (C_{2n}^{2n})^2 = 0$

Giải: 1. * Ta có: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+.....+C_{2n}^nx^n+.....+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

$$(1-x)^{2n}=C_{2n}^0x^{2n}-C_{2n}^1x^{2n-1}+.....+(-1)^nC_{2n}^nx^n\pm.....+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

Hệ số của x^{2n} trong tích $(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}$ là

$(C_{2n}^0)^2-(C_{2n}^1)^2+(C_n^2)^2-.....+(-1)^n(C_{2n}^n)^2\pm.....+(C_{2n}^{2n})^2$ (1)

* Mặt khác: $(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}=(1-x^2)^{2n}$

$=C_{2n}^0-C_{2n}^1x^2+.....+(-1)^nC_{2n}^n+.....+C_{2n}^{2n}(x^2)^{2n}$

Hệ số của x^{2n} trong khai triển $(1-x^2)^{2n}$ là $(-1)^nC_{2n}^n$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $(C_{2n}^0)^2-(C_{2n}^1)^2+.....+(-1)^n(C_{2n}^n)^2\pm.....+(C_{2n}^{2n})^2=(-1)^nC_{2n}^n$

2. Xem như bài tập tự luyện

Cách 4: Khai triển 1 lũy thừa nhị thức 1 biến hoặc tích của 1 đơn thức với 1 lũy thừa nhị thức 1 biến. Lấy đạo hàm 2 vế đến cấp thích hợp rồi thay biến bằng giá trị thích hợp.

VD1: Chứng minh

1. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+.....+nC_n^n=n2^{n-1}$ $(n\in N^*)$

2. $2.1.C_n^2+3.2.C_n^3+.....+n(n-1)C_n^n=n(n-1)2^{n-2}$ $(n\in N^*, n\geq 2)$

Giải: Bài này minh họa khá rõ cho ý tưởng đạo hàm.

1. Nhận thấy vế trái của đẳng thức mất C_n^0 và trong mỗi tổ hợp lại thấy hệ số đi với nó tăng đều một đơn vị nên ta sẽ dùng đạo hàm cấp 1.

Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+.....+C_n^nx^n$ (*)

Lấy đạo hàm 2 vế của (*) ta được: $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+.....+nC_n^nx^{n-1}$ (1)

Trong (1) chọn $x=1$ ta được: $n.2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+.....+nC_n^n$ (đpcm)

2. Nhận thấy vế trái của đẳng thức mất C_n^0 và C_n^1 và lại thấy trong mỗi tổ hợp hệ số đi với nó là tích 2 số nguyên liên tiếp nên ta sẽ dùng đạo hàm cấp 2.

Lấy đạo hàm 2 vế của (1) ta được: $n(n-1)(1+x)^{n-2}=2.1C_n^2+3.2C_n^3x+.....+n(n-1)C_n^nx^{n-2}$ (2)

trong (2) thay $x=1$ ta được: $n(n-1)2^{n-2}=2.1.C_n^2+3.2.C_n^3+.....+n(n-1)C_n^n$ (đpcm)

VD2: (ĐHSPHCM – ĐH Luật 2001) Chứng minh:

$$C_n^13^{n-1}+2C_n^23^{n-2}+3C_n^33^{n-3}+.....+nC_n^n=n.4^{n-1}$$

* Dấu hiệu sử dụng đạo hàm ở đây là khá rõ khi thấy lũy thừa của 3 giảm dần. Tới đây ta có 2 hướng xử lý:

_ Hướng 1: Khai triển $(1+x)^n$ rồi đạo hàm và chọn $x=3$. Dễ thấy hướng này không cho chúng ta được điều mong muốn.

_ Hướng 2: Ở đây các tổ hợp đều chứa n nên ta sẽ dùng khai triển $(3+x)^n$, sau đó đạo hàm 2 vế và thay $x=1$ ta sẽ có đpcm.

Giải: * Ta có: $(3+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.3^{n-k}.x^k=C_n^0 3^n+C_n^1 3^{n-1}x+C_n^2 3^{n-2}x^2+C_n^3 3^{n-3}x^3+.....+C_n^n x^n$ (1)

Lấy đạo hàm 2 vế của (1) ta được: $n(3+x)^{n-1}=C_n^1 3^{n-1}+2C_n^2 3^{n-2}x+3C_n^3 3^{n-3}x^2+.....+nC_n^n x^{n-1}$ (2)

Trong (2) thay $x=1$ ta được: $n.4^{n-1}=C_n^1 3^{n-1}+2C_n^2 3^{n-2}+3C_n^3 3^{n-3}+.....+nC_n^n$ (đpcm)

VD3: (TK 2006) Áp dụng khai triển nhị thức Newton của $(x^2+x)^{100}$ hãy chứng minh:

$$100C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101C_{100}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+102C_{100}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{101}-.....+199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}=0$$

Giải: Ta có: $(x^2+x)^{100}=x^{100}(1+x)^{100}=x^{100}\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k x^k=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k x^{100+k}$

$$=C_{100}^0x^{100}+C_{100}^1x^{101}+C_{100}^2x^{102}+.....+C_{100}^{99}x^{199}+C_{100}^{100}x^{200}\quad(1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$100(x^2+x)^{99}(2x+1)=100C_{100}^0x^{99}+101C_{100}^1x^{100}+102C_{100}^2x^{101}+.....+199C_{100}^{99}x^{198}+200C_{100}^{100}x^{199}$$

Thay $x=-\frac{1}{2}$ ta được:

$$0=-100C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99}+101C_{100}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-102C_{100}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{101}+.....+199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}-200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}$$

Chuyển vế và đổi dấu ta sẽ có đpcm.

Nhận xét: Câu hỏi được đặt ra ở đây là liệu không cho trước khai triển kia thì ta có thể giải quyết được bài toán này không? Xin để dành câu trả lời cho các bạn.

VD4: 1. (ĐHAN 2000) Tính tổng: $S=C_{2000}^0+2C_{2000}^1+3C_{2000}^2+.....+2001C_{2000}^{2000}$

2. Chứng minh: $3C_n^0+4C_n^1+5C_n^2+.....+(n+3)C_n^n=2^{n-1}(n+6)$

1. * Nhận xét: $(1+x)^{2000}=C_{2000}^0+C_{2000}^1x+C_{2000}^2x^2+.....+C_{2000}^{2000}x^{2000}$

Tới đâu nếu ta đạo hàm thì sẽ mất C_{2000}^0 và các hệ số đứng trước tổ hợp không như ta mong muốn. Tới đây bằng một chút khéo léo là nhân thêm x vào khai triển trên ta sẽ thu được kết quả.

* *Giải:* $x(1+x)^{2000}=x\sum_{k=0}^{2000}C_{2000}^k x^k=\sum_{k=0}^{2000}C_{2000}^k x^{1+k}=C_{2000}^0x+C_{2000}^1x^2+C_{2000}^2x^3+.....+C_{2000}^{2000}x^{2001}$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$(1+x)^{2000}+2000x(1+x)^{1999}=C_{2000}^0+2C_{2000}^1x+3C_{2000}^2x^2+.....+2001C_{2000}^{2000}x^{2000}\quad(2)$$

Trong (2) thay $x=1$ ta được: $2^{2000}+2000.2^{1999}=C_{2000}^0+2C_{2000}^1+3C_{2000}^2+.....+2001C_{2000}^{2000}$

Hay là $S=2002.2^{1999}$

2. * Nhận xét: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Nếu ta nhân thêm x vào giống câu trên thì không thu được điều mong muốn. Tinh ý một chút khi nhìn các số 3,4,5 ta sẽ khéo léo nhân x^3 để khi đạo hàm sẽ xuất hiện các số đó.

* Giải: Ta có: $x^3(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{3+k} = C_n^0 x^3 + C_n^1 x^4 + C_n^2 x^5 + ... + C_n^n x^{n+3}$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$3x^2(1+x)^n + nx^3(1+x)^{n-1} = 3C_n^0 x^2 + 4C_n^1 x^3 + 5C_n^2 x^4 + ... + (n+3)C_n^n x^{n+2}$ (2)

Trong (2) thay $x=1$ ta được: $3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + ... + (n+3)C_n^n = 3.2^n + n.2^{n-1} = 2^{n-1}(n+6)$

VD5: (ĐH A 2005) Tìm số nguyên dương n sao cho

$C_{2n+1}^2 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$

* Nhận xét: Nếu không rút gọn được vế trái ta sẽ không thể tìm được n. Ở đây dấu hiệu đạo hàm khá rõ, đó là dãy tăng liên tiếp. Qua các VD trên nhận thấy rằng giải bài toán bằng đạo hàm thường có 3 bước:

_ Bước 1: Chọn khai triển phù hợp, ở đây dễ thấy đó là $(1+x)^{2n+1}$.

_ Bước 2: Lấy đạo hàm 2 vế, nếu cần nhân thêm đại lượng thích hợp để xuất hiện vế trái.

_ Bước 3: Thay biến bằng giá trị thích hợp, nhận thấy bài này đó là $x=-2$.

* *Giải:* Ta có: $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2 x + 3C_{2n+1}^3 x^2 + ... + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n}$ (2)

Trong (2) thay $x=-2$ ta được:

$2n+1 = C_{2n+1}^2 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1}$

Vậy YCBT $\Leftrightarrow 2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$.

Cách 5: Khai triển một lũy thừa nhị thức một biến hoặc tích của một đơn thức với một lũy thừa nhị thức một biến. Lấy tích phân hai vế trên một đoạn thích hợp, thường là đoạn $[0,1]$

VD1: Cho n là một số nguyên dương. Tính tổng:

1. $S_1 = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$ 2. $S_2 = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - ..... + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n$

1. Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \left(xC_n^0 + \frac{x^2}{2}C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow S_1 = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

2. Ta có: $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^k = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ..... + (-1)^n C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ..... + (-1)^n C_n^n x^n\right) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \left(xC_n^0 - \frac{x^2}{2}C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^2 - ..... + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}C_n^n\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow S_2 = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - ..... + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$$

VD2:

A. (ĐHBKHN 1997) Cho n là một số nguyên dương.

1. Tính tích phân: $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$

2. Chứng minh: $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - ..... + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$

B. 1. Tính tích phân: $J = \int_0^1 (1-x)^n dx$

2. Chứng minh rằng tổng $S = 1 - \frac{2^1}{2}C_n^1 + \frac{2^1}{3}C_n^2 - \frac{2^3}{4}C_n^3 + ... + (-1)^n \frac{2^n}{n+1}C_n^n$ bằng 0 nếu n lẻ và bằng $\frac{1}{n+1}$ nếu n chẵn.

1. Đặt $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx$

x	0	1
t	1	0

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^n dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$$

2. Ta có: $x(1-x^2)^n = x\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{1+2k} = C_n^0 x - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 - ..... + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 x - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 - ..... + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} = \left(\frac{x^2}{2} C_n^0 - \frac{x^3}{3} C_n^1 + \frac{x^5}{5} C_n^2 - ..... + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - ..... + \frac{(-1)^n}{2n+2} C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$$

VD3:

1. (ĐH Duy Tân 2001) $S_1 = \frac{2^6}{1} C_6^0 + \frac{2^5}{2} C_6^1 + \frac{2^4}{3} C_6^2 + \frac{2^3}{4} C_6^3 + \frac{2^2}{5} C_6^4 + \frac{2}{6} C_6^5 + \frac{1}{7} C_6^6$

2. (ĐH B 2003) $S_2 = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^3-1}{3} C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n$

3. (VVT) $3^n C_n^0 + \frac{3^{n-1}}{2} C_n^1 + \frac{3^{n-2}}{3} C_n^2 + ... + \frac{3}{n} C_n^{n-1} + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{4^{n+1} - 3^{n+1}}{n+1}$

4. (VVT) $3C_n^0 + \frac{3^2}{2} C_n^1 + \frac{3^3}{3} C_n^2 + ... + \frac{3^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{4^{n+1}-1}{n+1}$

1. Nhận thấy lũy thừa của 2 giảm dần nên ta sẽ khai triển $(2+x)^6$ rồi lấy tích phân từ 0 tới 1.

Ta có: $(2+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k 2^{6-k} x^k = C_6^0.2^6 + C_6^1.2^5 x + C_6^2.2^4 x^2 + ... + C_6^6.2x^6$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2+x)^6 dx = \int_0^1 \left(C_6^0.2^6 + C_6^1.2^5 x + C_6^2.2^4 x^2 + ... + C_6^6.2x^6\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2+x)^7}{7}\Big|_0^1 = \left(xC_6^0 2^6 + \frac{x^2}{2} C_6^1 2^5 + \frac{x^3}{3} C_6^2 2^4 + ... + \frac{x^7}{7} C_6^6 2\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow S_1 = \frac{2^6}{1} C_6^0 + \frac{2^5}{2} C_6^1 + \frac{2^4}{3} C_6^2 + \frac{2^3}{4} C_6^3 + \frac{2^2}{5} C_6^4 + \frac{2}{6} C_6^5 + \frac{1}{7} C_6^6 = \frac{2059}{7}$$

2. Nhận thấy lũy thừa của 2 tăng dần nên ta sẽ khai triển $(1+x)^n$ rồi lấy tích phân từ 1 tới 2.

Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_1^2 = \left(xC_n^0 + \frac{x^2}{2} C_n^1 + \frac{x^3}{3} C_n^2 + ... + \frac{x^{n+1}}{n+1} C_n^n\right)\Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow S_2 = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^3-1}{3} C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$$

3,4. Tương tự, xem như BT tự luyện ☺

VD4: (ĐH A 2007) Chứng minh: $\frac{1}{2}C_{2n}^{1}+\frac{1}{4}C_{2n}^{3}+\frac{1}{6}C_{2n}^{5}+.....+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

* Nhận xét: Nhìn vào vế trái ta thấy nó thiếu đi $C_{2n}^{0},C_{2n}^{2},C_{2n}^{4},.....,C_{2n}^{2n}$. Việc chúng ta cần làm là phải tạo ra được biểu thức ở vế trái, và tinh ý ta sẽ thấy chỉ cần lấy hiệu 2 nhị thức $(1+x)^{2n}$ và $(1-x)^{2n}$ rồi lấy tích phân trên từ 0 tới 1 ta sẽ thu được đpcm.

* *Giải:* Ta có: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}+C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{4}x^{4}+C_{2n}^{5}x^{5}+.....+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

$$(1-x)^{2n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}-C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{4}x^{4}-C_{2n}^{5}x^{5}+.....+C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}=C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{5}x^{5}+.....+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\int_0^1\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^{3}+C_{2n}^{5}x^{5}+.....+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\Big|_0^1=\left(\frac{x^2}{2}C_{2n}^{1}+\frac{x^4}{4}C_{2n}^{3}+\frac{x^6}{6}C_{2n}^{5}+.....+\frac{x^{2n}}{2n}C_{2n}^{2n-1}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}C_{2n}^{1}+\frac{1}{4}C_{2n}^{3}+\frac{1}{6}C_{2n}^{5}+.....+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}\text{ (đpcm).}$$

VD5: Chứng minh: $\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+.....+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$

* Bài này là một mở rộng của cách dùng tích phân, xét trong đề ĐH có thể đây là câu "chặt" ☺. Sau đây xin giới thiệu đến các bạn lời giải vô cùng đặc sắc của thầy mình.

**Giải:* $\frac{C_n^0}{1.2}=\frac{n!}{1.2.0!n!}=\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{2.1![(n+1)-1]!}=\frac{1}{n+1}.\frac{C_{n+1}^{1}}{2}$

$$\frac{C_n^1}{2.3}=\frac{n!}{2.3.1!(n-1)!}=\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{3.2![(n+1)-2]!}=\frac{1}{n+1}.\frac{C_{n+1}^{2}}{3}$$

$$\frac{C_n^2}{3.4}=\frac{n!}{3.4.2!(n-2)!}=\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{4.3![(n+1)-3]!}=\frac{1}{n+1}.\frac{C_{n+1}^{3}}{4}$$

……………………………

$$\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{n!}{(n+1)(n+2)n!0!}=\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(n+2)(n+1)![(n+1)-(n+1)]!}=\frac{1}{n+1}.\frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+2}$$

$$\Rightarrow S=\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+.....+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{C_{n+1}^{1}}{2}+\frac{C_{n+1}^{2}}{3}+\frac{C_{n+1}^{3}}{4}+.....+\frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{C_{n+1}^{0}}{1}+\frac{C_{n+1}^{1}}{2}+\frac{C_{n+1}^{2}}{3}+.....+\frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+2}\right)-1\right]$$

Xét $T=\frac{C_{n+1}^0}{1}+\frac{C_{n+1}^1}{2}+\frac{C_{n+1}^2}{3}+.....+\frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+2}$

Ta có: $(1+x)^{n+1}=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1x+C_{n+1}^2x^2+.....+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}$

$$\Rightarrow \int_0^1(1+x)^{n+1}dx=\int_0^1\left(C_{n+1}^0+C_{n+1}^1x+C_{n+1}^2x^2+.....+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1=\left(xC_{n+1}^0+\frac{x^2}{2}C_{n+1}^1+\frac{x^3}{3}C_{n+1}^2+.....+\frac{x^{n+2}}{n+2}C_{n+1}^{n+1}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow T=\frac{2^{n+2}-1}{n+2}\Rightarrow S=\frac{1}{n+1}\left(\frac{2^{n+2}-1}{n+2}-1\right)=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}.$$

Các bạn hãy thử dùng cách trên tính tổng sau nhé, có lẽ là sẽ khó hơn một chút đấy ☺

Tính tổng: $P=\frac{C_n^0}{1.3}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.5}+.....+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+3)}$

Cách 6: Liên kết tổng cần tính với một tổng khác hoặc liên kết với chính nó theo hình thức khác. Thường dùng khai triển lũy thừa nhị thức rồi thay biến bằng giá trị thích hợp hoặc dùng tính chất đối xứng.

VD1: (ĐHQGHN 1998) Tính tổng: $S=C_{11}^6+C_{11}^7+C_{11}^8+C_{11}^9+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}$

* Bài này ý tưởng người ra đề khá hay nhưng hình thức bài toán có lẽ ….. chưa hay bởi có nhiều thí sinh đã sử dụng máy tính bấm và cho ra kết quả ☹. Dĩ nhiên ta sẽ không "giải" theo cách đó. Ta sẽ sử dụng ý tưởng "liên kết với chính nó".

**Giải:* Áp dụng tính chất $C_n^k=C_n^{n-k}$ ta có: $S=C_{11}^5+C_{11}^4+C_{11}^3+C_{11}^2+C_{11}^1+C_{11}^0$

$\Rightarrow 2S=C_{11}^0+C_{11}^1+C_{11}^2+C_{11}^3+C_{11}^4+C_{11}^5+C_{11}^6+C_{11}^7+C_{11}^8+C_{11}^9+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}$

$=(1+1)^{11}=2^{11}\Leftrightarrow S=2^{10}=1024$

VD2: Chứng minh:

1. (ĐHHV 2004) $C_{2004}^0+2^2C_{2004}^2+2^4C_{2004}^4+.....+2^{2002}C_{2004}^{2002}+2^{2004}C_{2004}^{2004}=\frac{3^{2004}+1}{2}$

2. (ĐHHH 2001) $C_{2n}^0+3^2C_{2n}^2+3^4C_{2n}^4+.....+3^{2n}C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}(2^{2n}+1)$

1. Đặt $S=2^0C_{2004}^0+2^2C_{2004}^2+.....+2^{2004}C_{2004}^{2004}$, $T=2^1C_{2004}^1+2^3C_{2004}^3+....+2^{2003}C_{2004}^{2003}$

Ta có: $(1+x)^{2004}=C_{2004}^0+C_{2004}^1x+C_{2004}^2x^2+C_{2004}^3x^3+.....+C_{2004}^{2003}x^{2003}+C_{2004}^{2004}x^{2004}$

Lần lượt cho $x=2$ và $x=-2$ ta được: $\begin{cases}S+T=3^{2004}\\S-T=1\end{cases}\Rightarrow S=\frac{3^{2004}+1}{2}$

2. Tương tự, các bạn tự làm ☺

VD3 : Chứng minh : $C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+.....+(2n+1)C_n^n=2^n(n+1)$

Giải : Đặt $S=C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+.....+(2n+1)C_n^n$

Áp dụng tính chất $C_n^k=C_n^{n-k}$ ta có:

$S=C_n^n+3C_n^{n-1}+5C_n^{n-2}+.....+(2n+1)C_n^0=(2n+1)C_n^0+(2n-1)C_n^1+.....+3C_n^{n-1}+C_n^n$

$\Rightarrow 2S=(2n+2)(C_n^0+C_n^1+C_n^2+.....+C_n^{n-1}+C_n^n)=(2n+2)(1+1)^n=2(n+1)2^n\Rightarrow S=2^n(n+1)$.

* Chúng ta cũng có thể chứng minh đẳng thức trên như sau :

Ta có : $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k=2\sum_{k=1}^{n}kC_n^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k$

Nếu các bạn đã đọc kĩ chuyên đề từ đầu thì việc xử lí 2 tổng này không có gì là khó khăn nữa ☺

* Mời các bạn thử sức với bài toán sau của thầy mình : Cho n nguyên dương. Chứng minh :

$$\frac{1}{C_{2n+1}^1}+\frac{1}{C_{2n+1}^2}+.....+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n+1}}=\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{1}{C_{2n}^0}+\frac{1}{C_{2n}^1}+.....+\frac{1}{C_{2n}^{2n}}\right)$$

Cách 7 : Dùng số phức :

_ Khai triển một lũy thừa nhị thức chứa đơn vị ảo i rồi tách phần thực, phần ảo.

_ Lại đưa nhị thức khai triển về dạng lượng giác để áp dụng công thức Moivre.

_ So sánh phần thực và ảo để ra kết quả.

VD1 : Cho n nguyên dương. Chứng minh : $\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos kx=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}$

Giải: Ta có: $(1+\cos x+i\sin x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x+i\sin x)^k$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos kx+i\sin kx)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos kx+i\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin kx$$

Lại có: $(1+\cos x+i\sin x)^n=\left(2\cos^2\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^n$

$$=\left[2\cos\frac{x}{2}\left(\cos x\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)\right]^n=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right)=2^n\cos^n\frac{x}{2}.\cos\frac{nx}{2}+i2^n\cos^n\frac{x}{2}.\sin\frac{nx}{2}$$

$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos kx=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}$. (đpcm) và $\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin kx=2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}$

VD2: 1. Tính $S_1 = C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ..... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$

2. Tính $S_2 = C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - ..... + C_{100}^{97} - C_{100}^{99}$

1. Ta có: $(1+i)^{19} = C_{19}^0 + C_{19}^1 i + C_{19}^2 i^2 + C_{19}^3 i^3 + C_{19}^4 i^4 + ... + C_{19}^{16} i^{16} + C_{19}^{17} i^{17} + C_{19}^{18} i^{18} + C_{19}^{19} i^{19}$

$= \left(C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ..... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18} \right) + i \left(C_{19}^1 - C_{19}^3 + C_{19}^5 - ..... + C_{19}^{17} - C_{19}^{19} \right)$

Lại có : $(1+i)^{19} = \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^{19} = (\sqrt{2})^{19} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)^{19}$

$= 512\sqrt{2} \left(\cos\frac{19\pi}{4} + i \sin\frac{19\pi}{4} \right) = 512\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -512 + 512i \Rightarrow S_1 = -512$

2. Đáp số : $S_2 = 0$, các bạn tự làm ☺

Qua bài này ta rút được một lưu ý quan trọng là : Các bài toán có chập cách nhau 2 đơn vị mà qua từng số hạng lại đổi dấu thì chắc chắn ta phải sử dụng số phức.

VD3 : (VVT) Tính tổng : $S = 3^n C_{2n}^0 - 3^{n-1} C_{2n}^2 + 3^{n-2} C_{2n}^4 - ..... + (-1)^n C_{2n}^{2n}$ với n nguyên dương thỏa mãn $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 = 52 A_{n-2}^2$

Giải : Dễ thấy dấu hiệu số phức ở đây. Vì có lũy thừa của 3 nên ta sẽ khai triển $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n}$

Ta có : $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \left(\sqrt{3}\right)^{2n-k} i^k$

$= \left[C_{2n}^0 3^n - 3^{n-1} C_{2n}^2 + 3^{n-2} C_{2n}^4 - ..... + (-1)^n C_{2n}^{2n} \right] + i \left[\left(\sqrt{3}\right)^{2n-1} C_{2n}^1 - \left(\sqrt{3}\right)^{2n-3} C_{2n}^3 + ... \right]$

(ta không cần quan tâm khúc sau)

Lại có : $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n} = \left[2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right) \right]^{2n}$

$= 2^{2n} \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i \sin\frac{n\pi}{3} \right) = 2^{2n} \cos\frac{n\pi}{3} + i.2^{2n} \sin\frac{n\pi}{3} \quad \Rightarrow S = 2^{2n} \cos\frac{n\pi}{3}$

Tới đây xem như bài toán đã xong, phần còn lại chắc cũng không khó khăn gì.

Các bạn thân mến, vậy là chúng ta đã đi qua 7 phương pháp để giải toán lên quan tới biểu thức chứa tổ hợp, đây là những vấn đề thật đẹp mà tôi được học trong tháng cuối cùng luyện thi ĐH cũng như trong cuộc đời học sinh, nó là một kỉ niệm không bao giờ quên được đối với tôi. Và cuối cùng xin chúc các bạn luôn thành công trong cuộc sống này, đặc biệt các bạn thi ĐH 2012 sẽ đạt được kết quả tốt nhất. ☺

Tài liệu tham khảo : Các chuyên đề Giải tích tổ hợp – ThS Huỳnh Công Thái
Chứng minh đẳng thức, Tính giá trị biểu thức – thầy Vũ Vĩnh Thái